Aula 8

Logaritmo Complexo

Definição: Define-se o **logaritmo complexo com ramo** $[\theta_0, \theta_0 + 2\pi[$ como a função log $: \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ dada por

$$\log_{\mathbb{C}}(z) = \log_{\mathbb{R}}|z| + i \operatorname{Arg} z, \qquad \operatorname{Arg} z \in [\theta_0, \theta_0 + 2\pi[.$$

Chama-se **ramo principal do logaritmo complexo** à escolha do ramo $]-\pi, \pi]$.

Proposição:

- $e^{\log z} = z$ para todo o $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.
- $\log(e^z) = z + 2\pi k\, i$ para todo o $z \in \mathbb{C}$ e $k \in \mathbb{Z}$ dependente de z.

Proposição: Para $z, w \in \mathbb{C}$

$$\log zw = \log z + \log w \qquad \text{(a menos de soma de } 2\pi k i).$$

Potências Complexas

Definição: Dados $z \neq 0, w \in \mathbb{C}$ define-se a **potência complexa** z^w como

$$z^w = e^{w \log z}.$$

Esta definição depende do ramo do logaritmo complexo utilizado.

Proposição: Dados $z \neq 0, w \in \mathbb{C}$

- z^w toma um único valor, independentemente do ramo do logaritmo utilizado sse $w \in \mathbb{Z}$.
- Se $w \in \mathbb{Q}$, com $w = p/q$ na forma irredutível, então z^w toma $q \in \mathbb{N}$ valores diferentes consoante o ramo do logaritmo.
- Se $w \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ou $\mathrm{Re}(w) \neq 0$ então z^w toma infinitos valores diferentes consoante o ramo do logaritmo.

Função raíz índice-n

Definição: Define-se a função $\sqrt[n]{z}$ para $z \neq 0$ como

$$\sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{\log z}{n}},$$

assumindo uma escolha do ramo do logaritmo complexo.
Designa-se pelo correspondente ramo da raíz.

$\boxed{\text{Topologia em } \mathbb{C}}$

$\mathbb{C}$ é um espaço métrico com a distância dada por

$$d(z, w) = |z - w|$$

$\mathbb{C}$ é **isométrico** a $\mathbb{R}^2$

$$B_\delta(z) = \{w \in \mathbb{C} : |w - z| < \delta\}$$